

ΣΑΒΒΑΤΟ 26 ΙΟΥΝΙΟΥ 1999  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

**ΘΕΜΑ 1ο**

**A.** Έστω  $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$  και  $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$  δύο διανύσματα του καρτεσιανού επιπέδου Oxy.

α) Να εκφράσετε (χωρίς απόδειξη) το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$  συναρτήσει των συντεταγμένων τους.

Μονάδες 3

β) Αν τα διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  δεν είναι παράλληλα προς τον άξονα  $y'y$  και  $\lambda_1, \lambda_2$  είναι οι συντελεστές διεύθυνσης των  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι:

$$\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 = -1$$

Μονάδες 5,5

γ) Αν τα διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  είναι μη μηδενικά και  $\theta$  είναι η γωνία των  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$ , να αποδείξετε ότι:

$$\cos\theta = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

Μονάδες 4

**B.**

α) Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha}_1 = (\lambda, \lambda - 1)$  και  $\vec{\beta}_1 = (4, \lambda)$ , με  $\lambda \neq 0$ . Για ποια από τις παρακάτω τιμές του  $\lambda$  τα διανύσματα  $\vec{\alpha}_1$  και  $\vec{\beta}_1$  είναι κάθετα;

A.  $\lambda=1$ ,

B.  $\lambda=3$ ,

Γ.  $\lambda=2$ ,

Δ.  $\lambda=-2$ ,

Ε.  $\lambda=-3$ .

Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Μονάδες 6,5

β) Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{u} = (1, -\sqrt{3})$ ,  $\vec{v} = (2, 2\sqrt{3})$  και  $\vec{w} = (\sqrt{3}, 1)$ .

Να αντιστοιχίσετε κάθε γωνία που βρίσκεται στη στήλη Α' με το μέτρο της που βρίσκεται στη στήλη Β'.

ΣΤΗΛΗ Α'

ΣΤΗΛΗ Β'

1. γωνία των  $\vec{u}$  και  $\vec{v}$

A.  $\pi/2$

2. γωνία των  $\vec{u}$  και  $\vec{w}$

B.  $\pi/6$

3. γωνία των  $\vec{v}$  και  $\vec{w}$

Γ.  $\pi/4$

Δ.  $2\pi/3$

Ε.  $3\pi/4$

Z.  $\pi/3$

Να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της Στήλης Α' και δίπλα το γράμμα της Στήλης Β' που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Μονάδες 6

**ΘΕΜΑ 2ο**

Δίνονται οι αριθμοί  $\alpha = 2k + 2$  και  $\beta = 6k + 7$ , όπου  $k$  ακέραιος αριθμός. Να αποδείξετε ότι:

α) Οι αριθμοί  $3\alpha$  και  $\beta$  είναι πρώτοι μεταξύ τους.

Μονάδες 9

β) Το υπόλοιπο της διαίρεσης του αριθμού  $(2\beta - \alpha)$  με το 10 είναι 2.

- γ) Αν ο αριθμός  $k$  είναι πολλαπλάσιο του 7, τότε και ο αριθμός  $(\alpha+\beta-2)$  είναι πολλαπλάσιο του 7.

Μονάδες 8

Μονάδες 8

### ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται τα σημεία  $A(8,0)$  και  $B(0,4)$  του καρτεσιανού επιπέδου  $Oxy$ .

- α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που ορίζεται από την αρχή των αξόνων  $O$  και το μέσο  $\Delta$  του τμήματος  $AB$ .

Μονάδες 9

- β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $(\epsilon)$  που διέρχεται από το σημείο  $\Delta$  και είναι κάθετη στην ευθεία  $OA$ .

Μονάδες 9

- γ) Έστω  $M$  τυχαίο σημείο της παραπάνω ευθείας  $(\epsilon)$ . Να δείξετε ότι ισχύει η σχέση:

$$\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = 2\overrightarrow{OM}^2$$

Μονάδες 7

### ΘΕΜΑ 4ο

Θεωρούμε έναν πληθυσμό από 1999 μυρμήγκια. Κάθε μυρμήγκι χαρακτηρίζεται από έναν αριθμό  $n=1,2,3,\dots,1999$  και κινείται επάνω στο καρτεσιανό επίπεδο  $Oxy$  διαγράφοντας μια τροχιά με εξίσωση:

$$(x-1)^2 + y^2 = 2n(x+y-1).$$

Να δείξετε ότι:

- α) η τροχιά κάθε μυρμηγκιού είναι κύκλος και να βρεθούν οι συντεταγμένες του κέντρου του

Μονάδες 9

- β) κατά την κίνησή τους όλα τα μυρμήγκια διέρχονται από ένα σταθερό σημείο  $A$  (που είναι η φωλιά τους). Ποιες είναι οι συντεταγμένες του σημείου  $A$ ;

Μονάδες 8

- γ) οι τροχιές όλων των μυρμηγκιών εφάπτονται της ευθείας  $x+y-1=0$  στο σημείο  $A$ .

Μονάδες 8