

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β' ΤΑΞΗΣ  
ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΣΑΒΒΑΤΟ 24 ΙΟΥΝΙΟΥ 2000  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ :  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

**ΘΕΜΑ 1ο**

**A.1.** Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο  $K(x_0, y_0)$  και ακτίνα  $\rho$ .

Μονάδες 2

**A.2.** Πότε η εξίσωση  $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$  παριστάνει κύκλο; Ποιο είναι το κέντρο του και ποια η ακτίνα του;

Μονάδες 4,5

**A.3.** Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη  $\varepsilon$  του κύκλου  $C: x^2 + y^2 = \rho^2$  σε ένα σημείο του  $A(x_1, y_1)$  έχει εξίσωση  $xx_1 + yy_1 = \rho^2$ .

Μονάδες 6

**B.1.** Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.  
Δίνεται κύκλος  $x^2 + y^2 = 10$  και το σημείο του  $M(1, -3)$ . Η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο  $M$  έχει εξίσωση:

A.  $x + 3y = 10$ ,    B.  $5x - y = 8$ ,    Γ.  $x - 3y = 10$ ,  
Δ.  $3x + 2y = 3$ ,    E.  $\frac{1}{2}x + y = 5$

Μονάδες 4

**B.2.** Στη **Στήλη Α** δίνονται οι εξισώσεις που παριστάνουν κύκλους και στη **Στήλη Β** τα κέντρα των κύκλων και οι ακτίνες τους. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της **Στήλης Α** και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης Β** που αντιστοιχεί στη σωστή εξίσωση του κύκλου.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$	1. Κ (0, -1), $\rho = 2$
β. $x^2 + (y + 1)^2 = 4$	2. Κ (3, -2), $\rho = 1$
	3. Κ (3, -2), $\rho = 4$

Μονάδες 4

**B.3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- α. Το σημείο (1, -1) ανήκει στον κύκλο  $x^2 + y^2 = 2$ .
- β. Ο κύκλος  $x^2 + y^2 = 4$  και η ευθεία  $y = 2x$  εφάπτονται.
- γ. Η εξίσωση  $x^2 + y^2 + \lambda^2 = 0$ , όπου  $\lambda$  πραγματικός αριθμός, είναι εξίσωση κύκλου.

Μονάδες 4,5

### ΘΕΜΑ 2ο

Θεωρούμε τους ακεραίους της μορφής  $a = 6k + u$  με  $0 \leq u < 6$  και  $k$  ακέραιος.

Να δείξετε ότι:

- α) οι παραπάνω ακέραιοι  $a$  που δεν είναι πολλαπλάσια του 2 ή του 3 παίρνουν τη μορφή  $a = 6k + 1$  ή τη μορφή  $a = 6k + 5$ , όπου  $k$  ακέραιος

Μονάδες 10

**β)** το τετράγωνο κάθε ακεραίου αριθμού της μορφής του ερωτήματος (α) μπορεί να πάρει τη μορφή:  $\alpha^2 = 3\mu + 1$ , όπου  $\mu$  ακέραιος

Μονάδες 10

**γ)** η διαφορά των τετραγώνων δύο ακεραίων του ερωτήματος (α) είναι πολλαπλάσιο του 3.

Μονάδες 5

### ΘΕΜΑ 3ο

Για τα διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  ισχύουν οι σχέσεις  $2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} = (4, -2)$  και  $\vec{\alpha} - 3\vec{\beta} = (-7, 8)$ .

**α)** Να δείξετε ότι  $\vec{\alpha} = (-1, 2)$  και  $\vec{\beta} = (2, -2)$ .

Μονάδες 7

**β)** Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός  $k$ , ώστε τα διανύσματα  $k\vec{\alpha} + \vec{\beta}$  και  $2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$  να είναι κάθετα.

Μονάδες 8

**γ)** Να αναλυθεί το διάνυσμα  $\vec{\gamma} = (3, -1)$  σε δύο κάθετες συνιστώσες, από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο διάνυσμα  $\vec{\alpha}$ .

Μονάδες 10

### ΘΕΜΑ 4ο

Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων  $Oxy$ , η εξίσωση ευθείας  $(\lambda - 1)x + (\lambda + 1)y - \lambda - 3 = 0$ , όπου  $\lambda$  πραγματικός αριθμός, περιγράφει τη φωτεινή ακτίνα που εκπέμπει ένας περιστρεφόμενος φάρος  $\Phi$ .

**α)** Να βρείτε τις συντεταγμένες του φάρου  $\Phi$ .

Μονάδες 8

β) Τρία πλοία βρίσκονται στα σημεία  $K(2, 2)$ ,  $L(-1, 5)$  και  $M(1, 3)$ . Να βρείτε τις εξισώσεις των φωτεινών ακτίνων που διέρχονται από τα πλοία  $K$ ,  $L$  και  $M$ .

Μονάδες 4,5

γ) Να υπολογίσετε ποιο από τα πλοία  $K$  και  $L$  βρίσκεται πλησιέστερα στη φωτεινή ακτίνα που διέρχεται από το πλοίο  $M$ .

Μονάδες 6

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν της θαλάσσιας περιοχής που ορίζεται από το φάρο  $\Phi$  και τα πλοία  $L$  και  $M$ .

Μονάδες 6,5

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο μπορούν να γίνουν και με μολύβι.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μια (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**